

APPROCHE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES SOLS PAR LE MODELE équivalent LINEAIRE

A. DJEDID
A. BEKKOUCHE
I.G.C
Université de Tlemcen

RÉSUMÉ

Le comportement des sols soumis à des chargements dynamiquement est très complexe. On est souvent amené à admettre des hypothèses simplificatrices pour pouvoir aborder sa modélisation. Souvent l'approche du comportement dynamique des sols consiste à adopter le modèle équivalent linéaire. Il consiste à approcher le comportement non linéaire du sol par un modèle localement linéaire, les paramètres sont ajustés en fonction des distorsions. Les résultats obtenus montrent que le modèle reste intéressant pour la gamme des déformations concernées.

MOTS CLÉS

Sols • comportement dynamique • modèle équivalent linéaire.

1. Introduction

La reconnaissance dynamique des sols trouve des applications industrielles dans des domaines où les enjeux économiques sont très importants. Quand il s'agit de construire des centrales nucléaires ou de grands barrages, les conditions de sécurité exigées sont très sévères. Ces ouvrages doivent résister aux séismes les plus sévères. Pour cela, les paramètres dynamiques des sols, qui sont souvent le module de cisaillement dynamique et le coefficient d'amortissement, sont déterminés par des essais in-situ utilisant le principe de propagation des ondes.

Le travail présenté ici permet une interprétation des essais cross-hole [11] ou des essais monopuits (1,2) dans la gamme des déformations inférieures à 10^{-4} avec une excitation harmonique à la source.

2. Domaines de modélisation du comportement des sols [6]

Pour approcher le comportement du sol, les lois élastiques sont tout à fait utilisables si l'amplitude de la déformation de cisaillement ne dépasse pas 10^{-5} . De par sa simplicité, le modèle élastique linéaire est le plus utilisé. Dans le cas d'un cisaillement, la relation reliant la contrainte à la déformation est:

$$\tau = G_0 \cdot \gamma$$

τ , γ et G_0 sont respectivement la contrainte de cisaillement, la déformation de cisaillement et le module de cisaillement. Ce dernier dépend, pour un matériau donné, de la contrainte moyenne initiale et de l'indice des vides.

Bien entendu ce type de loi ne peut représenter les phénomènes de dissipation constatés même sous de très faibles déformations. Dans ce but, on peut adopter une modélisation viscoélastique linéaire. Cette loi se traduit dans le cas d'un modèle de Kelvin-Voigt par :

$$\tau = G_0 \cdot \gamma + \mu' \cdot \dot{\gamma}$$

Avec μ' et $\dot{\gamma}$ sont respectivement le coefficient de viscosité et la vitesse de la déformation de cisaillement.

L'utilisation de cette loi est proche du comportement élastique, mais elle introduit un amortissement interne et des déphasages entre contraintes et déformations. Dans un chargement harmonique, cette relation se traduit dans le plan (τ, γ) ou (σ, ϵ) par une ellipse (Figure 1). L'aire de l'ellipse est reliée à l'amortissement, l'inclinaison de son axe ainsi que la contrainte maximale dépendent de la fréquence.

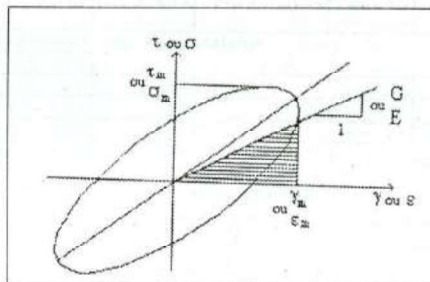


Figure 1 : Relation (τ, γ) pour une déformation cyclique. Cas d'un modèle de Kelvin-Voigt.

Le modèle viscoélastique linéaire précédant ne représente que fort mal le comportement réel des sols, même pour des déformations extrêmement petites. Pour des déformations cycliques imposées de cisaillement inférieures à 10^{-4} , le sol présente un comportement hystérétique. La relation contrainte-déformation se traduit par une boucle d'hystérésis (Figure 2) dont l'aire et l'inclinaison dépendent de l'amplitude γ_m . Cette boucle ne dépend plus de la fréquence, comme c'était le cas dans le modèle viscoélastique.

Il est commode de caractériser cette boucle par:

- $G(\gamma_m)$ module de cisaillement sécant défini

par:

$$G(\gamma_m) = \frac{\tau_m}{\gamma_m}$$

- $\eta(\gamma_m)$ coefficient d'amortissement défini par:

$$\eta(\gamma_m) = \frac{E_d}{4 \cdot \pi \cdot E_e}$$

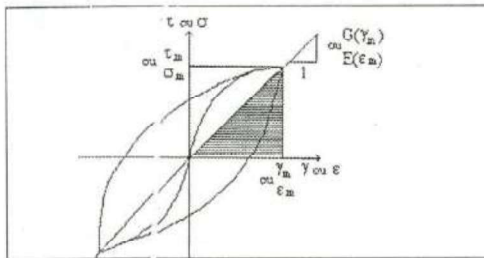


Figure 2 : Relation (τ, γ) pour une déformation cyclique. Cas d'un comportement hystérétique.

Où, E_d est l'énergie dissipée pendant un cycle correspondant à l'aire de la boucle de l'hystérésis et E_e est l'énergie élastique mise en jeu pendant un cycle (correspondant à l'aire du triangle hachuré sur la figure 2 et est donnée par :

$$E_e = \frac{1}{2} \gamma_m^2 G(\gamma_m)$$

Dans cette gamme de déformation, la boucle d'hystérésis n'évolue pas avec la répétition des cycles charge - décharge. Pour modéliser un tel comportement cyclique, diverses règles ont été proposées. Dans cette gamme de déformation, le modèle équivalent linéaire peut être utilisé [9]. Il consiste à approcher la boucle de la figure 2 par une ellipse de la figure 1. Il s'agit surtout d'ajuster les modules sécants et l'amortissement.

Il est parfois plus intéressant d'approcher le comportement des sols par des règles simulant le cycle de la figure 2. La plus utilisée est celle de Masing (8) qui stipule que la courbe de chargement et de déchargement peuvent être obtenues à partir de la courbe du premier chargement par une homothétie de rapport 2. Cette courbe de premier chargement est donnée par divers modèles tels que le modèle de Hardin-Drnevich [4,5], le modèle de Kondor-Zelasko [7] et le modèle de Ramberg-Osgood [10].

A partir d'un seuil de déformation estimé à environ 10^{-4} , la forme des boucles d'hystérésis change avec la répétition des cycles charge-décharge; les caractéristiques du sol évoluent et il y aura accumulation des déformations permanentes. La méthode équivalente linéaire ne peut plus être appliquée. C'est le domaine des lois élastoplastiques. Ce domaine peut couvrir des déformations allant jusqu'à 10^{-2} .

Pour de grandes déformations allant à plus de 10^{-2} (séismes de forte intensité), le comportement des sols devient très complexe, et les contraintes effectives ne suffisent plus toutes seules à décrire le comportement du sol. On doit tenir compte de l'évolution de la pression interstitielle, qui peut dans certains cas annuler les contraintes effectives et provoquer une rupture

par liquéfaction. Les lois incrémentales sont construites pour prendre en compte ce phénomène par l'intermédiaire de l'histoire du chargement du sol à partir d'un état initial connu.

Il faut noter que dans la pratique, les domaines de comportement ne sont pas aussi nettement séparés que le laissent penser les chiffres. Le sol présente un comportement évolutif, et le passage d'un comportement à un autre n'est pas aussi brusque.

3. Approche par équivalence linéaire du comportement des sols

3.1 Notion d'équivalence :

Principes d'équivalence :

Ce principe d'équivalence est formulé pour des vibrations en régime établi, c'est à dire pour des déformations cycliques stabilisées. Il consiste à écrire que la boucle effort - déformation, dans un essai réel, telle que représentée en figure 2 peut être approchée par une ellipse, analogue à celle obtenue pour un corps viscoélastique linéaire présentée en figure 1 dans le cas d'un corps de Kelvin - Voigt.

On dira que ces deux cycles représentent des comportements équivalents :

- Si les boucles ont la même inclinaison, ce qui traduit une équivalence des modules.
- Si les boucles ont la même surface, ce qui traduit une équivalence des amortissements.

Il faut noter que pour la boucle réelle, la fréquence n'intervient pas sur la valeur de l'amortissement, contrairement à la boucle viscoélastique linéaire où la surface de celle-ci est proportionnelle à la fréquence.

Relations d'équivalence :

Dans l'espace temps, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant soumis à un cisaillement simple s'écrit au moyen du produit de convolution, noté * :

$$\tau(t) = R(t) * \gamma(t)$$

R' étant la réponse impulsionnelle, obtenue en dérivant par rapport au temps la fonction de relaxation ou la fonction retard du matériau. Ces fonctions sont ici indépendantes de γ .

La transformée de Fourier de l'équation précédente s'écrit :

$$\tau(\omega) = M(\omega) \cdot \gamma(\omega)$$

avec $\tau(\omega)$ transformée de Fourier de $\tau(t)$, $\gamma(\omega)$ transformée de Fourier de $\gamma(t)$ et $M(\omega)$ transformée de Fourier de $R'(t)$.

Dans le cas d'un chargement harmonique à la pulsation ω_0 , $M(\omega_0)$ n'est autre que le module complexe $\mu+i \cdot \omega_0 \cdot \mu'$ ou encore $G_0+i \cdot \omega_0 \cdot \mu'$; i étant le complexe dont le carré vaut -1.

Les paramètres de l'ingénieur sont définis comme suit :

- Module de cisaillement :

$$G_0 = \text{Reel}\{M(\omega_0)\}$$

- Dissipation au cours d'un cycle de chargement :

$$D_{vis}(\gamma_m, \omega_0) = \pi \cdot \gamma_m^2 \cdot \text{Im}\{M(\omega_0)\}$$

Rendre équivalent un comportement dont la relation contrainte déformation est une ellipse à un comportement dont la relation est de type de la figure 2 consiste à définir un nouveau module complexe M_1 qui obéit aux conditions suivantes :

a- Indépendance du module complexe vis-à-vis de la pulsation :

On écrira la relation de comportement indépendante de la pulsation de la façon suivante :

$$\tau = M_1 \cdot \gamma$$

La relation ci-dessus suppose la réponse forme des cycles harmoniques si la sollicitation harmonique.

b- Equivalence quant à la dissipation :

Un matériau réel dont la relation contrainte déformation est décrite par la figure 2 dissipera la même énergie qu'un matériau visco-élastique linéaire, pour une sollicitation harmonique de pulsation ω_0 , si :

$$\text{Im}\{M_1\} = 2 \cdot G(\gamma_m) \cdot \eta(\gamma_m)$$

c- Equivalence quant au module :

Pour réaliser cette équivalence, on écrit que l'inclinaison du cycle hystérétique est identique à l'inclinaison de l'ellipse. Deux points de vue sont proposés :

- On parlera de la pente donnée par le rapport

$$G(\gamma_m) = \tau/\gamma_m$$

et où τ est la contrainte correspondant à la déformation maximale γ_m .

- On parlera de la pente donnée par le rapport

$$G(\gamma_m) = \tau_m/\gamma_m$$

Ce calcul est effectué pour τ_m et γ_m qui sont respectivement la contrainte maximale et la déformation maximale.

Pour les calculs, on adoptera la proposition de Dormieux [3] qui vérifie les conditions (b) et (c). Cette proposition s'écrit :

$$M_1 = G(\gamma_m) \cdot \left\{ \sqrt{1 - 4 \cdot \eta^2(\gamma_m)} + 2 \cdot i \cdot \eta(\gamma_m) \right\}$$

4. Equations du problème

4.1 Hypothèses

En plus des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie du milieu, le problème est traité en considérant une géométrie axisymétrique avec une excitation harmonique créant un déplacement vertical à la source. Ce déplacement créera des déformations de cisaillement vertical et dont la propagation est horizontale.

4.2 Tenseur de déformation

En se plaçant dans un repère cylindrique (r, z, ϕ) et conformément à l'hypothèse de propagation radial du mouvement, seul la composante suivante du tenseur des déformations est non nulle :

$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

w étant la composante du déplacement exprimé dans un repère orthonormé (x, y, z) .

4.3 Equation fondamentale de la dynamique

Dans un pareil cas, l'équation de la dynamique donne :

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

4.4 Relation de comportement :

La relation de comportement est celle d'un corps viscoélastique linéaire. Elle s'écrit :

$$\sigma_{ij} = k \cdot \epsilon_{ij} + k' \cdot \dot{\epsilon}_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \epsilon_{ij} + 2 \cdot \mu' \cdot \dot{\epsilon}_{ij}$$

Cette loi écrite en fonction uniquement des déplacements donne :

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} \right\} + \mu' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} \right\}$$

Dans la mesure où la réponse en tout point est supposée harmonique, le déplacement s'écrit :

$$w(r,t) = W(r) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

avec W et ω respectivement l'amplitude complexe et la pulsation.

Cette relation reportée dans la relation de comportement donne :

$$M_1 \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial M_1}{\partial r^*} \frac{\partial W^*}{\partial r^*} + \rho \cdot \omega_0^2 \cdot W^* = 0$$

La relation contraintes - déplacements pour un corps viscoélastique équivalent s'obtient en remplaçant le module complexe du cas linéaire par le module complexe équivalent tel que défini par M_1 . Cette relation s'écrit :

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = M_1 \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Cette dernière introduite dans la relation de la dynamique donne l'équation différentielle en déplacement suivante :

$$M_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial M_1}{\partial r^*} \frac{\partial W}{\partial r^*} = -\rho \cdot \omega_0^2 \cdot W$$

On remarque la disparition du terme $e^{i \cdot \omega \cdot t}$ puisque le déplacement est supposé harmonique en tout point, il ne constitue plus une inconnue.

4.5 Equation adimensionnelle :

En général, il est plus intéressant de résoudre, quand il est possible, les problèmes avec des variables adimensionnelles. Pour cela, les notations suivantes :

$$W_r^* = \frac{W_r}{r_0}, W_c^* = \frac{W_c}{r_0} \quad \text{et} \quad r^* = \frac{r}{r_0}$$

r_0 est le rayon du puits d'excitation, il est pris comme dimension de référence. W_r et W_c sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du déplacement complexe.

Ces notations permettent d'obtenir l'équation différentielle en déplacement adimensionnel suivante :

$$M_1 \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial W^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial M_1}{\partial r^*} \frac{\partial W^*}{\partial r^*} + \rho \cdot \omega_0^2 \cdot W^* = 0$$

4.6 Conditions aux limites

Pour résoudre ce problème, des conditions aux limites sont à définir. On prendra au puits, une sollicitation harmonique dont l'amplitude est connue ; et loin du puits ou du moins à une certaine distance du puits assimilable à l'infini, un déplacement nul.

5. Algorithme de résolution

5.1 Mise en forme de l'équation

Pour résoudre l'équation différentielle du problème, on décompose l'amplitude adimensionnelle W^* en partie réelle et partie imaginaire. On pose donc les expressions suivantes :

$$W^* = W_r^* + i \cdot W_c^*$$

$$C = C_r + i \cdot C_c = \frac{1}{M_1} \frac{\partial M_1}{\partial r^*}$$

$$D = D_r + i \cdot D_c = \frac{\omega_0^2 \cdot r_0^2 \cdot \rho}{M_1}$$

et on définit les opérateurs suivants :

$$\Pi = \frac{d^2}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*}$$

$$\Omega = \frac{d}{dr^*}$$

L'équation différentielle du problème s'écrit:

$$\begin{cases} \Pi W_r^* = Y_1 \\ \Pi W_c^* = Y_2 \\ Y_1 = -\{C_r \cdot \Omega W_r^* - C_c \cdot \Omega W_c^* + D_r \cdot W_r^* - D_c \cdot W_c^*\} \\ Y_2 = -\{C_c \cdot \Omega W_r^* + C_r \cdot \Omega W_c^* + D_r \cdot W_c^* + D_c \cdot W_r^*\} \end{cases}$$



BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. CHELTA, "Projet d'instrumentation in situ monopuits pour la reconnaissance de caractéristiques sismiques de sols". Thèse de Doctorat, U.S.T.L., Montpellier, France, 1990.
- [2] A. DJEDID, "Introduction à la reconnaissance monopuits harmonique de caractéristiques dynamiques in situ des sols: Instrumentation et modélisations". Thèse de Doctorat, U.S.T.L., Montpellier, France, 1989.
- [3] L. DORMIEUX, "Détermination des caractéristiques dynamiques d'un sol à l'aide d'un essai pressiométrique cyclique". Revue Française de Géotechnique, N°46, pp.43-75.
- [4] B.O. HARDIN, V.P. DRNEVICH, "Shear Modulus and Damping in Soils : Measurement and Parameter Effects". Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proc. of the A.S.C.E., SM6, June, pp. 603-624.
- [5] B.O. HARDIN, V.P. DRNEVICH, "Shear Modulus and Damping in Soils: Design Equations and Curves". Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proc. of the A.S.C.E., SM7, July, pp. 667-691.



[6] J.L. HUJEUX, "Une loi de comportement pour le chargement cyclique des sols. Génie parasismique, (V. Davidivici éd.), Presses de l'E.N.P.C., pp. 287-302.

[7] R.L. KONDER, J.S. ZELASKO, "A Hyperbolic Stress Formulation for Sands". Proc. 2nd Pan Am. Conf. On Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 1, pp. 289-324.

[8] MASING, Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing. Proc. 2nd Int. Conf. Of Applied Mechanics, pp. 332-335, Zurich, Switzerland.

[9] A. PECKER, Comportement des sols sous chargement cyclique. Génie parasismique, (V. Davidivici éd.), Presses de l'E.N.P.C., pp. 275-285.

[10] W. RAMBERG, W.T. OSGOOD, Description of Stress-Strain Curves by Tree Parameters. Tech. Note 902, National Advisory Committee for Aeronautics.

[11] SHANNON & WILSON and AGEBIAN ASSOCIATES, "In Situ Impulse Test. An Experimental and Analytical Evaluation of Data Interpretation Procedures", Rapport pour l'armée américaine.

Ce système est écrit en isolant au second membre les termes non linéaires. La non linéarité est due au fait que les coefficients C et D dépendent de r par l'intermédiaire du module complexe M_1 . Ce dernier dépend de l'amplitude de la distorsion γ_m , qui elle-même dépend de r.

5.2 Discretisations des dérivations

Les opérateurs définis précédemment contiennent des dérivations du premier et du second ordre. Ces derniers sont approchés par des dérivations discrètes centrées. C'est à dire pour un W^* quelconque:

$$\frac{dW^*}{dr^*}(r^*) = \frac{W^*(r^* + \Delta r^*) - W^*(r^* - \Delta r^*)}{2 \cdot \Delta r^*}$$

$$\frac{d^2W^*}{dr^{*2}}(r^*) = \frac{W^*(r^* + \Delta r^*) - 2 \cdot W^*(r^*) + (r^* - \Delta r^*)}{(\Delta r^*)^2}$$

Au puits ainsi qu'à la distance considérée comme infinie, l'utilisation des dérivations centrées n'est pas possible. Dans ce cas, on utilisera au puits la dérivation à droite. C'est à dire :

$$\frac{dW^*}{dr^*}(r^*) = \frac{W^*(r^* + \Delta r^*) - W^*(r^*)}{\Delta r^*}$$

et au loin, la dérivation à gauche. C'est à dire :

$$\frac{dW^*}{dr^*}(r^*) = \frac{W^*(r^*) - W^*(r^* - \Delta r^*)}{\Delta r^*}$$

ceci uniquement pour la dérivée première.

5.3 Algorithme numérique

Le système contient deux équations différentielles non linéaires couplées entre elles par le second membre. L'algorithme de résolution passe par les étapes suivantes :

a- Estimation de W^* et W^* à l'aide des valeurs fournies la solution de l'élasticité linéaire.

b- Avec ces valeurs, on calcule les deux seconds membres Y_1 et Y_2 et on résout le système obtenu après discrétisation des deux opérateurs Δ et Ω pour obtenir de nouvelles valeurs de W_r et W_c .

c- On compare ces valeurs avec celles utilisées au pas précédent. Si le test de convergence est négatif, on reprend à partir de la deuxième étape jusqu'à convergence. Si le test de convergence est positif, on arrête le calcul.

Le module du déplacement ainsi que le déphasage entre l'excitation et la réponse sont donnés respectivement par les relations suivantes :

$$|W^*(r)| = \sqrt{W_r^{*2}(r) + W_c^{*2}}$$

$$Arg W^*(r) = Aretg \left\{ \frac{W_c^*}{W_r^*} \right\}$$

5.4 Applications

Données :

Les calculs ont été effectués en utilisant les paramètres suivants :

• Caractéristiques des sols :

Terrain 1 : $G_0=1,27 \cdot 10^9$ Pa., $\rho=1,80$ Kg /m³.

Terrain 2 : $G_0=3,60 \cdot 10^9$ Pa., $\rho=1,92$ Kg /m³.

• Fréquences:

$f_1=1$ Hz.

$f_2=20$ Hz.

Ces fréquences constituent en quelque sorte les fréquences extrêmes rencontrées en génie parasismique.

• Conditions géométriques :

Le rayon du puits r_0 est pris égal à 0,1m.

La distance à partir de laquelle le déplacement est supposé négligeable est prise égale à 10m.

L'amplitude du déplacement au puits est prise égale à 10^{-4} m.

Résultats :

Les résultats obtenus sont illustrés sur les figures données ci-après (Figure 3, 4, 5). Les paramètres illustrés sont respectivement l'amplitude du déplacement, l'amplitude des distorsions et la phase entre l'excitation et la réponse.

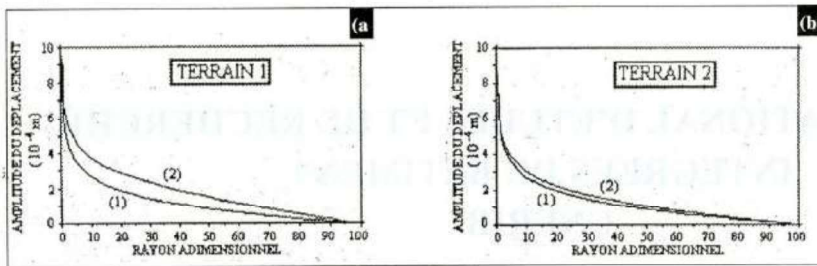


Figure 3 (a, b) : Amplitude adimensionnelle du déplacement en fonction du rayon adimensionnel pour deux fréquences d'excitation.

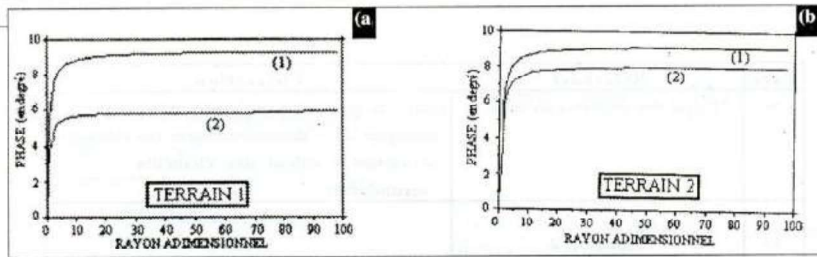


Figure 4 (a, b) : Déphasage entre l'excitation et la réponse en fonction du rayon adimensionnel pour deux fréquences.

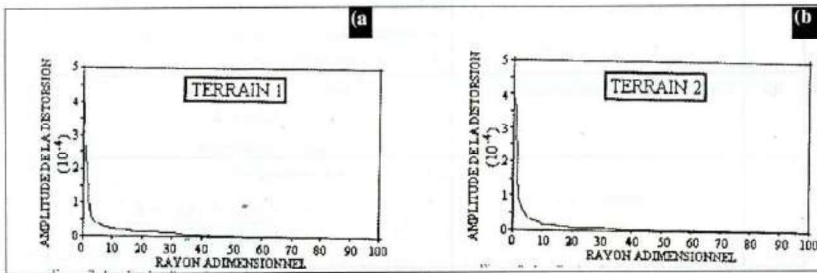


Figure 5 (a, b) : Amplitude adimensionnelle des distortions en fonction du rayon adimensionnel pour deux fréquences d'excitation.

6. Conclusion

Les résultats obtenus montrent les faits suivants:

- Le terrain 1 est plus sensible à la fréquence de la sollicitation que le terrain 2. Ceci se traduit par des courbes qui sont moins éloignées pour le premier terrain que pour le second, qu'il s'agisse des courbes représentant le déplacement ou les phases. Les courbes représentant l'amplitude des distortions sont confondues et pratiquement identiques pour les deux terrains et les deux fréquences. L'amplitude des distortions obtenue reste limitée dans le domaine

concerné par la validité pratique du modèle équivalent linéaire.

- L'amplitude des distortions décroît très rapidement en s'éloignant du puits d'excitation. Cette amplitude devient pratiquement nulle au-delà de quatre mètres. Ceci s'explique par le cumul de l'amortissement interne du sol dû au comportement hystérétique de ces derniers et de l'amortissement géométrique dû à la configuration radiale de propagation.

- Le déphasage reste limité à des valeurs inférieures à 10 degrés. Ce déphasage se stabilise approximativement à partir d'un mètre ■